Οριακές Συνθήκες

Το ΗΜ πεδίο υπολογίζεται σε χώρο που περικλείεται από ακραίες επιφάνειες, π.χ. στο χώρο μεταξύ δύο σφαιρικών επιφανειών ή στο χώρο μεταξύ δύο κυλινδρικών επιφανειών. Σε οριακές περιπτώσεις η εξωτερική ακραία επιφάνεια είναι η επιφάνεια στο άπειρο και η εσωτερική ακραία επιφάνεια γίνεται σημείο ή γραμμή.

Στο εσωτερικό του ΗΜ πεδίου υπάρχουν περιοχές όπου η μεταβολή του είναι συνεχής. Οι περιοχές αυτές διαχωρίζονται μεταξύ τους από τις επιφάνειες ασυνέχειας. Οι επιφάνειες αυτές μπορεί να είναι οι διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ υλικών με διαφορετικές ιδιότητες, ή μπορεί να οφείλονται σε επιφανειακές κατανομές φορτίων και ρευμάτων μέσα στο ίδιο υλικό. Σε οριακές περιπτώσεις οι επιφάνειες ασυνέχειας καταλήγουν σε ανώμαλα σημεία και γραμμές, όπου το πεδίο γίνεται άπειρο.

Μέσα στις περιοχές συνεχούς μεταβολής εφαρμόζονται οι διαφορικές εξισώσεις του Maxwell. Στις επιφάνειες ασυνέχειας, δηλαδή στα σύνορα μεταξύ των περιοχών ομαλών μεταβολών, χρησιμοποιούνται οι οριακές (ή συνοριακές) συνθήκες.

Οι σχέσεις αυτές, που όπως είδαμε προέρχονται από την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων του Maxwell είναι:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \qquad (1)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \qquad (2) \qquad (\vec{K} \text{ ή } \vec{J}_s)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \qquad (3) \qquad (\sigma \text{ ή } \rho_s)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \qquad (4)$$

και από το νόμο της διατήρησης του φορτίου:

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{K} \qquad (5)$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο, κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια διάνυσμα, που διευθύνεται από την περιοχή 1 προς την περιοχή 2.

* $\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$: οι εφαπτομενικές συνιστώσες της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης είναι πάντα συνεχείς

* $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$: οι εφαπτομενικές συνιστώσες της μαγνητικής πεδιακής έντασης παρουσιάζουν μεταβολή που εξαρτάται από την επιφανειακή πυκνότητα του ρεύματος στη διαχωριστική επιφάνεια

$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$: οι κάθετες συνιστώσες της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής (ή διηλεκτρικής μετατόπισης) παρουσιάζουν στη διαχωριστική επιφάνεια μεταβολή ίση με την επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου στην επιφάνεια αυτή.

$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$: οι κάθετες συνιστώσες της πυκνότητας της μαγνητικής ροής (ή μαγν. επαγωγή) είναι πάντα συνεχείς.

Τα σημεία κ' οι γραμμές ανωμαλίας, όπου το πεδίο γίνεται άπειρο, μπορούν να θεωρηθούν οριακές περιπτώσεις επιφανειών ασυνέχειας. Οι οριακές συνθήκες στα σημεία και στις γραμμές αυτές προσδιορίζονται πάλι από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Θεωρούμε, π.χ. το ηλεκτροστατικό πεδίο που δημιουργείται σε χώρο επιτρεπτότητας ε από διάφορες κατανομές φορτίου και από ένα σημειακό φορτίο q στην αρχή των συντεταγμένων. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ βρίσκεται από την υπέρθεση του πεδίου $\vec{E}_q$, που οφείλεται στο σημειακό φορτίο, και του πεδίου που προκαλείται από τα υπόλοιπα φορτία. Στη θέση του σημειακού φορτίου η $\vec{E}_q$ γίνεται άπειρη, ενώ η πεδιακή ένταση των υπόλοιπων φορτίων παραμένει πεπερασμένη και επομένως, είναι αμελητέα :

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r} \qquad (\text{για } \vec{r} \rightarrow 0) \qquad (6)$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι σε ένα ηλεκτροστατικό πρόβλημα όπου, εκτός των άλλων κατανομών φορτίου, υπάρχει και μία κατανομή κατά μήκος του άξονα z με γραμμική πυκνότητα λ, ισχύει:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}_\lambda = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}\,\hat{r} \qquad \text{για } \vec{r} \rightarrow 0 \qquad (7)$$

Για το μόνιμο μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στη ροή ρεύματος i κατά μήκος του άξονα z, και σε άλλες κατανομές ρευμάτων, θα έχουμε:

$$\vec{H} \rightarrow \vec{H}_i = \frac{i}{2\pi r}\,\hat{\varphi} \qquad \text{για } \vec{r} \rightarrow 0 \qquad (8)$$

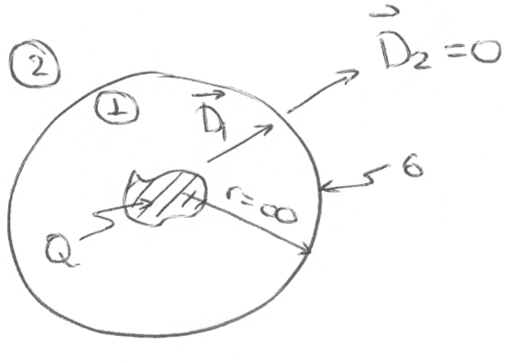
Όταν το πεδίο εκτείνεται σε ολόκληρο το χώρο, οι οριακές του επιφάνειες στο καρτεσιανό ΣΣ είναι τα επίπεδα $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ και $z = \pm\infty$. Στο κυλινδρικό σύστημα είναι οι κυκλικές, κυλινδρικές επιφάνειες $r=0$ κ' $r=\infty$, καθώς και τα επίπεδα $z = \pm\infty$. Τέλος, στο σφαιρικό ΣΣ είναι οι σφαιρικές επιφάνειες $r=0$ και $r=\infty$, καθώς και οι κωνικές επιφάνειες $\theta=0$ κ' $\theta=\pi$ (δηλ. ο άξονας z).

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε το ηλεκτροστατικό πεδίο σε μία σφαιρική περιοχή με κέντρο στην αρχή ενός συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων. Η οριακή συνθήκη στην αρχή αυτή είναι η σχέση (6), όπου q είναι το σημειακό φορτίο στο κέντρο της σφαιρικής περιοχής. Εάν δεν υπάρχει σημειακό φορτίο στην αρχή, θα ισχύει ότι:

$$\lim_{r \to 0} \vec{E} = \text{πεπερασμένο} \qquad (9)$$

Οι οριακές συνθήκες στις επιφάνειες που βρίσκονται στο άπειρο μπορούν να προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες με την ακόλουθη υπόθεση. Στις επιφάνειες αυτές είναι διανεμημένα φορτία και ρεύματα σε τρόπο ώστε το συνολικό πεδίο έξω από τις επιφάνειες να είναι μηδενικό και μέσα από τις επιφάνειες να έχει τη συμμετρία που επιβάλλουν οι πηγές στις πεπερασμένες περιοχές τους. Στις πεπερασμένες αυτές περιοχές δεν πρέπει να δημιουργείται πεδίο οφειλόμενο στις πηγές του απείρου, εκτός αν δηλώνεται σαφώς σε κάποιο πρόβλημα ότι υπάρχει πεδίο από τις πηγές στο άπειρο.

Ας εξετάσουμε το ηλεκτροστατικό πεδίο που προκαλείται από συνολικό φορτίο Q διανεμημένο κατά κάποιο τρόπο σε μια περιορισμένη περιοχή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε μεγάλες αποστάσεις από τα φορτία ($r \to \infty$), το πεδίο τους θα συμπεριφέρεται όπως το πεδίο ενός σημειακού φορτίου



Q:

$$\vec{D} \to \frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{r} \quad (\text{για } \vec{r} \to \infty) \qquad (10)$$

Η ίδια οριακή συνθήκη βρίσκεται και με τον ακόλουθο τρόπο. Φορτίο −Q διανέμεται με σφαιρική συμμετρία στη σφαιρική επιφάνεια με άπειρη ακτίνα (βλ. σχήμα), ώστε το πεδίο στην περιοχή ② να είναι μηδέν και στην περιοχή (1), κοντά στη σφαιρική επιφάνεια με $r \to \infty$, να έχει σφαιρική συμμετρία, αφού σε τόσο μεγάλες αποστάσεις από τα φορτία, το πεδίο θα συμπεριφέρεται όπως το πεδίο ενός σημειακού φορτίου Q.

Από τη συνοριακή συνθήκη (3):

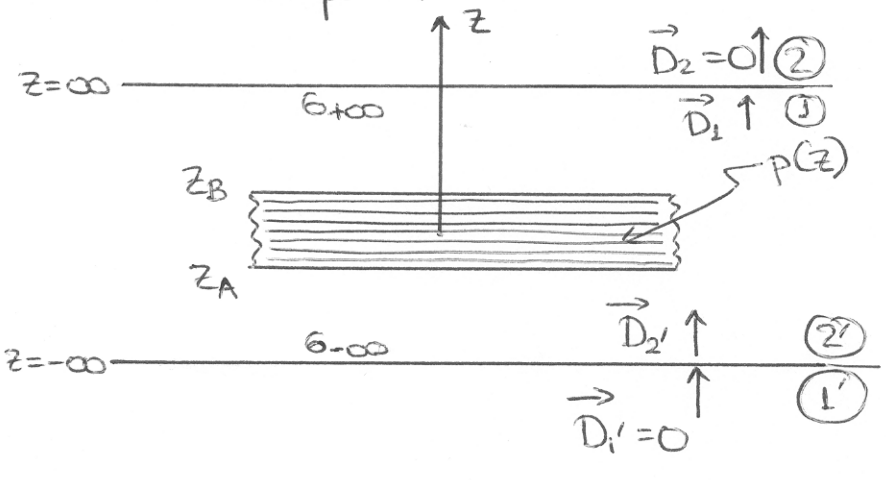
$$D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma$$

βρίσκουμε για $r \to \infty$, την οριακή συνθήκη:

$$D_{r_1} = D_{r_2} - \sigma \to 0 - \left(-\frac{Q}{4\pi r^2}\right) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Οι εφαπτομενικές συνιστώσες E_{θ_1} και E_{φ_1} στο άπειρο θα είναι μηδενικές σύμφωνα με τη σχέση (1).

Στο δεύτερο παράδειγμα, αν μελετήσουμε το ηλεκτροστατικό πεδίο μιας κατανομής φορτίου σε ένα στρώμα απέραντης έκτασης ως προς τις διευθύνσεις x και y μεταξύ των επιπέδων z_A και z_B, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η χωρική πυκνότητα φορτίου εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη z στην κάθετη διεύθυνση.

Στα επίπεδα $z \to +\infty$ και $z \to -\infty$ θα υπάρχει φορτίο με επιφανειακές πυκνότητες σ_{∞} και $\sigma_{-\infty}$. Οι πυκνότητες αυτές πρέπει να είναι ίσες, διαφορετικά θα υπήρχε πεδίο στις περιρασμένες περιοχές, που θα προκαλείτο από τα φορτία στο άπειρο. Το συνολικό φορτίο στα δύο επίπεδα $z \to \pm\infty$ και στο στρώμα από z_A μέχρι z_B είναι μηδέν. Συνεπώς, οι επιφανειακές πυκνότητες στο άπειρο θα είναι:

$$\sigma_{\infty} = \sigma_{-\infty} = -\frac{1}{2}\int_{z_A}^{z_B} \rho(z)\,dz$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (3): $D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma$ βρίσκουμε για $z \to \infty$:

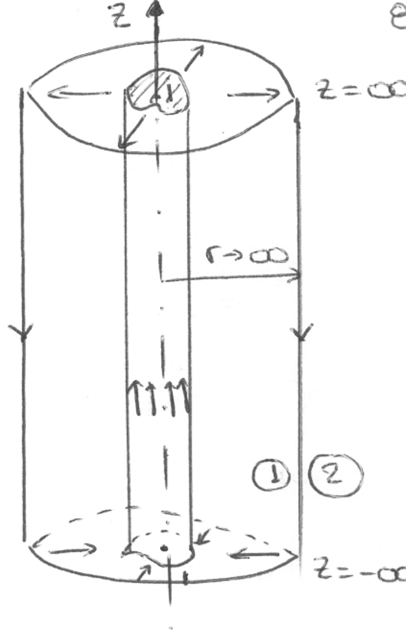
$$D_{z_1} = D_{z_2} - \sigma_{\infty} \to 0 - \left[-\frac{1}{2}\int_{z_A}^{z_B} \rho(z)dz\right] = \frac{1}{2}\int_{z_A}^{z_B} \rho(z)dz$$

και για $z \to -\infty$:

$$D'_{z_2} = D'_{z_1} + \sigma_{-\infty} \to 0 + \left[-\frac{1}{2}\int_{z_A}^{z_B} \rho(z)dz\right] = -\frac{1}{2}\int_{z_A}^{z_B} \rho(z)dz$$

Οι συνιστώσες E_x και E_y θα είναι μηδενικές για $z \to \pm\infty$, σύμφωνα με τη σχέση (1).

Ένα παράδειγμα τώρα από τη μαγνητοστατική. Θεωρούμε ότι συνολικό ρεύμα I ρέει παράλληλα στον άξονα z από $z = -\infty$ μέχρι $z = +\infty$ με κάποια κατανομή σε μια πεπερασμένη περιοχή στο εγκάρσιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η ροή του ρεύματος συνεχίζεται στο επίπεδο $z \to \infty$, στην κυλινδρική επιφάνεια $r \to \infty$ και στο επίπεδο $z \to -\infty$. Στην κυλινδρική επιφάνεια



$r \to \infty$ το ρεύμα ρέει με κυλινδρική συμμετρία, ώστε το πεδίο στην περιοχή ①, κοντά στην κυλινδρική επιφάνεια (με $r=\infty$) να έχει κυλινδρική συμμετρία, όπως περιμένουμε για τόσο μεγάλες αποστάσεις από το ρεύμα I.

Από τη συνοριακή συνθήκη (2): $\hat{r} \times \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{K}$ έχουμε για $r \to \infty$ τις οριακές συνθήκες:

$$H_{\varphi_1} = H_{\varphi_2} - K_z \to 0 - \left(-\frac{I}{2\pi r}\right) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$H_{z_1} = H_{z_2} + K_\varphi \to 0 + 0 = 0$$

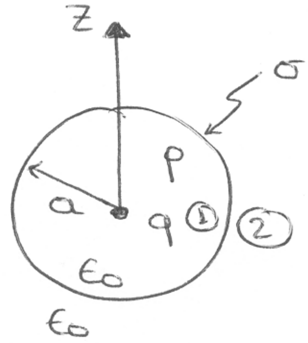
Η κάθετη συνιστώσα B_{r_1} για $r \to \infty$ θα είναι μηδενική, σύμφωνα με τη σχέση (4).

Στην περίπτωση της ηλεκτροδυναμικής, η οριακή συνθήκ στο άπειρο προκύπτει από την παρατήρηση ότι υπάρχουν μόν εξερχόμενα κύματα στην επιφάνεια του απείρου και όχι, πρ φανώς, εισερχόμενα.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν χρησιμοποιούμε για τη λύση τους, τις συμμετρικές (διαφορικές) σχέσεις. Τα περισσότερα παρουσιάζουν συμμετρία, οπότε οι ολοκληρωτικές εξισώσεις δίνουν τις λύσεις ευκολότερα. Σε προβλήματα χωρίς συμμετρία, αλλά με όλες τις πηγές γνωστές, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η υπέρθεση. Η χρησιμότητα των συμμετρικών σχέσεων είναι πολύ μεγάλη σε προβλήματα με οριακές συνθήκες χωρίς συμμετρία

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί με τις σημειακές σχέσεις η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στον αέρα που οφείλεται στην ακόλουθη κατανομή φορτίων σε μια σφαίρα ακτίνας α. Στο κέντρο της σφαίρας υπάρχει σημειακό φορτίο q, στο εσωτερικό της σφαίρας το φορτίο έχει σταθερή χωρική πυκνότητα ρ, και στην επιφάνεια της σφαίρας υπάρχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ.



Λύση:

Για να επωφεληθούμε της σφαιρικής συμμετρίας, θα εργαστούμε σε ένα σφαιρικό ΣΣ με την αρχή του στο κέντρο της σφαίρας. Χάρη στη συμμετρία αυτή, η ένταση του ηλ. πεδίου θα εξαρτάται μόνο από την ακτίνα r, δηλ. την απόσταση από το κέντρο.

Το επιφανειακό φορτίο στη σφαιρική επιφάνεια προκαλεί ασυνέχεια του πεδίου και έτσι χωρίζει το χώρο στις περιοχές ① και ②, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Λόγω του φορτίου q στην αρχή του ΣΣ, έχουμε:

$$r \to 0 \qquad \vec{E}_1 \to \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cdot\hat{r} \Rightarrow \begin{cases} E_{r_1} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (1) \\ E_{\theta_1} = 0 & (2) \\ E_{\varphi_1} = 0 & (3) \end{cases}$$

Στην περιοχή $0 < r < a$ ισχύει:

$$\nabla \times \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot E_{\varphi_1}\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_{\theta_1}}{\partial\varphi} = 0 \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_{r_1}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r E_{\varphi_1}\right) = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r E_{\theta_1}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_{r_1}}{\partial\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{ctg\theta}{r} E_{\varphi_1} = 0 & (4) \\ -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r E_{\varphi_1}\right) = 0 & (5) \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r E_{\theta_1}\right) = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial\varphi} = \frac{\partial E}{\partial\theta} = 0\right)$$

$$\left(ctg\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{D}_1 = \rho \Rightarrow \nabla\cdot\left(\epsilon_0\cdot\vec{E}_1\right) = \rho \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_{r_1}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, E_{\theta_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_{\varphi_1}}{\partial\varphi} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 E_{r_1}\right) + \frac{ctg\theta}{r} E_{\theta_1} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες για το ηλεκτρικό πεδίο στη σφαιρική επιφάνεια $r = a$:

$$\hat{r}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{\theta_2} = E_{\theta_1} & (8) \\ E_{\varphi_2} = E_{\varphi_1} & (9) \end{cases}$$

$$\hat{r}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma \Rightarrow E_{r_2} - E_{r_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (10)$$

Διαφορικές εξισώσεις του Maxwell για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή $r > a$:

$$\nabla \times \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{ctg}\theta}{r} E_{\varphi_2} = 0 & (11) \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r E_{\varphi_2}) = 0 & (12) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r E_{\theta_2}) = 0 & (13) \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}_2 = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \cdot \vec{E}_2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E_{r_2}) + \frac{\text{ctg}\theta}{r} E_{\theta_2} = 0 \quad (14)$$

Οριακή συνθήκη στο άπειρο: $(r \to \infty)$

$$\vec{E}_2 \to 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{r_2} \to 0 & (15) \\ E_{\theta_2} \to 0 & (16) \\ E_{\varphi_2} \to 0 & (17) \end{cases}$$

Από (4), (11) $\Rightarrow E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2} = 0$ (18) Ικανοποιούνται έτσι και οι σχέσεις (3), (5), (9), (12) και (17).

Από τις σχέσεις (6) κ' (13) βρίσκουμε ότι:

$$E_{\theta_1} = \frac{k_1}{r} \qquad \text{και} \qquad E_{\theta_2} = \frac{k_2}{r}$$

όπου k_1 και k_2 σταθερές. Έτσι η (16) ικανοποιείται αυτόματα. Από τη (2) κ' την (8) όμως έχουμε $k_1 = k_2 = 0$.

Συνεπώς

$$E_{\theta_1} = E_{\theta_2} = 0 \quad (19).$$

(Σε κάθε ηλεκτροστατικό πρόβλημα με σφαιρική συμμετρία $E_\varphi = 0$ κ' $E_\theta = 0$).

Λύνουμε τώρα την (7) λαμβάνοντας υπόψη ότι $E_{\theta_1}=0$:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 E_{r_1}\right)=\frac{\rho}{\epsilon_0}\cdot r^2 \Rightarrow r^2 E_{r_1}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 E_{r_1}=\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0}+C_1 \Rightarrow E_{r_1}=\frac{\rho r}{3\epsilon_0}+\frac{C_1}{r^2}$$

Από την (1) όμως βρίσκουμε ότι $C_1=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$, κ' επομένως:

$$E_{r_1}=\frac{\rho\cdot r}{3\epsilon_0}+\frac{q}{4\pi\epsilon_0\cdot r^2}$$

Η προφανής λύση της (14), για $E_{\theta_2}=0$, είναι:

$$E_{r_2}=\frac{C_2}{r^2}$$

η οποία ικανοποιεί κ' την οριακή συνθήκη (15).

Η σταθερά C_2 προσδιορίζεται από τη συνοριακή συνθήκη (10):

$$E_{r_2}-E_{r_1}=\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{C_2}{a^2}-\left(\frac{\rho\cdot a}{3\epsilon_0}+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\right)=\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2=\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}+\frac{q}{4\pi\epsilon_0}+\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}$$

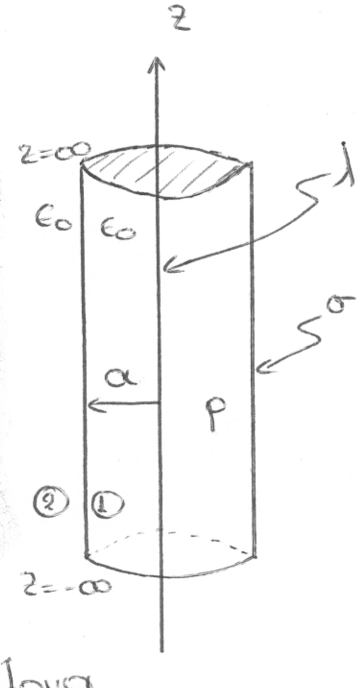
κ' τελικά

$$E_{r_2}=\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0\cdot r^2}+\frac{q}{4\pi\epsilon_0\cdot r^2}+\frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^2$$

Φυσικά, οι λύσεις θα μπορούσαν να είχαν υπολογιστεί πολύ πιο εύκολα, αν είχαμε χρησιμοποιήσει την ολοκληρωτική μορφή των βασικών νόμων. Το ίδιο όμως δεν ισχύει με τα περισσότερα προβλήματα.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί με τις σημειακές σχέσεις η ηλεκτροστατική πεδιακή ένταση στον αέρα που οφείλεται στην εξής κατανομή φορτίων σε ένα κύλινδρο απέραντης έκτασης με ακτίνα α. Κατά μήκος του άξονα υπάρχει φορτίο με σταθερή γραμμική πυκνότητα λ, στο εσωτερικό του κυλίνδρου το φορτίο έχει σταθερή χωρική πυκνότητα ρ και στην κυλινδρική επιφάνεια υπάρχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ.



Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα κυλινδρικό ΣΣ.

Οι κατανομές του φορτίου παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία (δηλ. είναι ανεξάρτητες της γωνίας φ) και ομοιομορφία κατά μήκος του άξονα z (δηλ. είναι ανεξάρτητες της συντεταγμένης z). Περιμένουμε ότι και το πεδίο θα είναι ανεξάρτητο από τις φ κ' z και θα είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης r από τον άξονα.

Οριακή συνθήκη στον άξονα z $(r \to 0)$:

$$\vec{E}_1 \to \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\hat{r} \Rightarrow \begin{cases} E_{r_1} \to \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (1) \\ E_{\varphi_1} \to 0 & (2) \\ E_{z_1} \to 0 & (3) \end{cases}$$

Διαφορικές εξισώσεις για την περιοχή ① $(0<r<\alpha)$:

$$\nabla \times \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial E_{z_1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_{\varphi_1}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial E_{r_1}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z_1}}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_{\varphi_1}) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_{r_1}}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{dE_{z_1}}{dr} = 0 & (4) \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r E_{\varphi_1}) = 0 & (5) \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}_1 = \rho \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_1) = \rho \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_{r_1}) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_{z_1}}{\partial z} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r E_{r_1}) = \rho/\epsilon_0 . \qquad (6)$$

Οριακές συνθήκες πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια $(r=a)$

$$\hat{r} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{\varphi_2} = E_{\varphi_1} & (7) \\ E_{z_2} = E_{z_1} & (8) \end{cases}$$

$$\hat{r} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \Rightarrow \qquad E_{r_2} - E_{r_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (9)$$

Διαφορικές εξισώσεις για την περιοχή ② $(r>a)$:

$$\nabla \times \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{dE_{z_2}}{dr} = 0 & (10) \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r E_{\varphi_2}) = 0 & (11) \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r E_{r_2}) = 0 \quad (12)$$

Οριακή συνθήκη στο άπειρο $(r \to \infty)$:

$$\vec{E}_2 \to 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{r_2} \to 0 & (13) \\ E_{\varphi_2} \to 0 & (14) \\ E_{z_2} \to 0 & (15) \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow E_{\varphi_1} = \frac{k_1}{r} \quad , \quad k_1 = \text{σταθερά}$$

$$(2) \Rightarrow k_1 = 0$$

$$(11) \Rightarrow E_{\varphi_2} = \frac{k_2}{r} \quad , \quad k_2 = \text{σταθερά}$$

$$(7) \Rightarrow k_2 = 0$$

Επομένως $\quad E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2} = 0 \quad (16)$

Η (14) ικανοποιείται αυτόματα.

Από τις σχέσεις (4) και (10) έχουμε ότι:

$$E_{z_1} = k_3 \qquad E_{z_2} = k_4$$

οι σταθερές k_3 κ' k_4 πρέπει να είναι μηδενικές, σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες (3), (8) και (15). Άρα:

$$E_{z_1} = E_{z_2} = 0 \quad (17)$$

$$(6) \Rightarrow \frac{d}{dr}(r E_{r_1}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot r \Rightarrow r E_{r_1} = \frac{\rho \cdot r^2}{\epsilon_0} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{r_1} = \frac{\rho \cdot r}{2\epsilon_0} + \frac{C_1}{r}$$

$$(1) \Rightarrow C_1 = \frac{d}{2\pi\epsilon_0}$$

Επομένως : $$E_{r_1} = \frac{\rho \cdot r}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad (18)$$

$$(12) \Rightarrow E_{r_2} = \frac{C_2}{r}$$

Η οποία ικανοποιεί και την οριακή συνθήκη (13).

Η σταθερά C_2 προσδιορίζεται από τη συνοριακή συνθήκη (9):

$$\frac{C_2}{a} - \left(\frac{\rho \cdot a}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot a} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} + \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$

κ' τελικά : $$E_{r_2} = \frac{\rho \cdot a^2}{2\epsilon_0 \cdot r} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} + \frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0 \cdot r}$$

Η λύση θα ήταν ευκολότερη αν είχαμε χρησιμοποιήσει την ολοκληρωτική μορφή των βασικών νόμων.

Παράδειγμα 3.

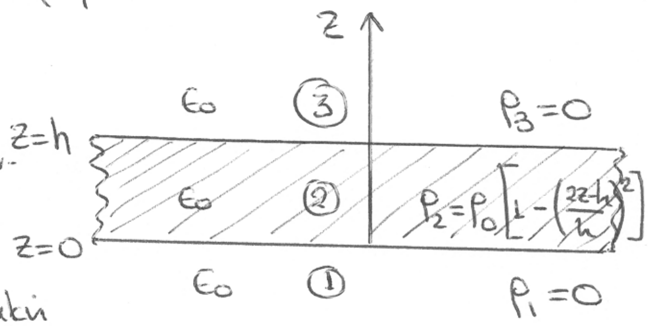
Ηλεκτρικό φορτίο είναι τοποθετημένο στον αέρα σε χώρο απέραντης έκτασης στις διευθύνσεις x και y από z=0 μέχρι z=h με χωρική πυκνότητα:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \left(\frac{2z-h}{h} \right)^2 \right]$$

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση:

(Το παράδειγμα αυτό το έχουμε λύσει με ολοκληρωτικές σχέσεις και θα το λύσουμε εδώ με σημειακές (διαφορικές) σχέσεις.)



Αφού η κατανομή των φορτίων γίνεται σε στρώμα απέραντης έκτασης στις διευθύνσεις x και y με πυκνότητα που είναι συνάρτηση μόνο της z, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση θα είναι και αυτή συνάρτηση μόνο της z.

Αντί να προσδιορίσουμε όλες τις συνιστώσες της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης με τις σημειακές σχέσεις, παρατηρούμε (χρησιμοποιώντας υπέρθεση και συμμετρία όπως σε προηγούμενα παραδείγματα) ότι οι συνιστώσες x και y πρέπει να είναι μηδενικές.

Επομένως η ένταση του πεδίου που θέλουμε να βρούμε θα έχει τη μορφή:

$$\vec{E} = E_z(z) \cdot \hat{z} .$$

Για τον υπολογισμό, διακρίνουμε τις τρεις περιοχές που φαίνονται στο σχήμα και γράφουμε τις σημειακές σχέσεις και τις οριακές συνθήκες.

Οριακή συνθήκη για $z \to -\infty$:

$$E_{z_1} \to -\frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^h \rho(z)\,dz = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0}\int_0^h \left[1-\left(\frac{2z-h}{h}\right)^2\right]dz = -\frac{\rho_0 \cdot h}{3\epsilon_0} \quad (1)$$

Διαφορικές εξισώσεις για την περιοχή ①: $(z<0)$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow 0=0$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow \frac{dE_{z_1}}{dz} = 0 \quad (2)$$

Οριακές συνθήκες για $z=0$:

$$\hat{z} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow 0=0$$

$$\hat{z} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow E_{z_2} = E_{z_1} \quad (3)$$

Διαφορικές εξισώσεις για την περιοχή ② $(0<z<h)$:

$$\nabla \times \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow 0=0$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \cdot \vec{E}_2) = \rho \Rightarrow \frac{dE_{z_2}}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[1-\left(\frac{2z-h}{h}\right)^2\right] \quad (4)$$

Οριακές συνθήκες για $z=h$:

$$\hat{z} \times (\vec{E}_3 - \vec{E}_2) = 0 \Rightarrow 0=0$$

$$\hat{z} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_3 - \epsilon_0 \vec{E}_2) = 0 \Rightarrow E_{z_3} = E_{z_2} \quad (5)$$

Διαφορικές εξισώσεις για την περιοχή ③ $(z>h)$:

$$\nabla \times \vec{E}_3 = 0 \Rightarrow 0=0$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 E_3) = \rho \Rightarrow \frac{dE_{z_3}}{dz} = 0 \quad (6)$$

Οριακή συνθήκη για $z \to +\infty$:

$$E_{z_3} \to \frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^h \rho(z)\,dz = \frac{\rho_0 h}{3\epsilon_0}.$$

Η (2) δείχνει ότι η E_{z_1} είναι σταθερή. Η σταθερά προσδιορίζεται από τη συνθήκη (1).

$$E_{z_1} = -\frac{\rho_0 \cdot h}{3\epsilon_0} \qquad (8)$$

Από την (4) και από την (3) βρίσκουμε για την περιοχή 2 ότι

$$E_{z_2} = E_{z_2}(z=0) + \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^z \rho\,dz = -\frac{\rho_0 \cdot h}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\int_0^z \left[1 - \left(\frac{2z-h}{h}\right)^2\right]dz =$$

$$= \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}(2z-h)\left[3 - \left(\frac{2z-h}{h}\right)^2\right] \qquad (9)$$

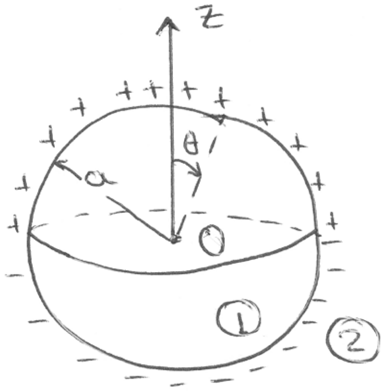
Η (6) δείχνει ότι η E_{z_3} είναι σταθερή. Η σταθερά αυτή υπολογίζεται από την οριακή συνθήκη (5) ή την (7).

$$E_{z_3} = \frac{\rho_0 \cdot h}{3\epsilon_0} \qquad (10)$$

Η μέθοδος με τις διαφορικές σχέσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στις περιπτώσεις που η χωρική πυκνότητα $\rho(z)$ δεν παρουσιάζει συμμετρία, επειδή είναι ευκολότερη από την τεχνική με τις ολοκληρωτικές σχέσεις.

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό πεδίο στον αέρα που προκαλείται από φορτίο κατανεμημένο σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r=a$ με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos\theta$, όπου θ η σφαιρική συντεταγμένη.



Λύση

Η σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r=a$ με το επιφανειακό φορτίο είναι επιφάνεια ασυνέχειας και χωρίζει το πεδίο σε δύο περιοχές. Θα χρησιμοποιήσουμε , σφαιρικό ΣΣ, αφού η επιφάνεια ασυνέχειας είναι σφαιρική.

Η κατανομή του φορτίου δεν παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία. Η συμμετρία είναι κυλινδρική, δηλαδή η ένταση του ηλ. πεδίου θα είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης φ και δε θα έχει συνιστώσα στη διεύθυνση φ:

$$\vec{E}(r,\theta) = E_r(r,\theta)\cdot\hat{r} + E_\theta(r,\theta)\cdot\hat{\theta}$$

Η απευθείας εφαρμογή των ολοκληρωτικών σχέσεων του πεδίου οδηγεί σε μαθηματικές δυσκολίες εξαιτίας της ασυμμετρίας. Εάν π.χ. εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss για την ηλεκτρική ροή σε μια σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα $r>a$ θα έχουμε:

$$\oint \varepsilon_0 \cdot E_r(r,\theta)\cdot dS = q_{\varepsilon\sigma\omega\tau} = 0$$

Η συνιστώσα E_r εξαρτάται από τη γωνία θ, δηλαδή δεν είναι σταθερή στη σφαιρική επιφάνεια ολοκλήρωσης και, έτσι, δε μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα. Η παραπάνω εξίσωση, επομένως, παραμένει ολοκληρωτική για τη συνιστώσα αυτή και δε μπορεί να γίνει αλγεβρική.

Οι διαφορικές εξισώσεις για την περιοχή ① και για τη ② είναι:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right] = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, E_\theta) = 0 \quad (2)$$

Οριακές συνθήκες:

$r \to 0$: $\vec{E}_1$ = πεπερασμένο (3)

$r = a$: $E_{\theta_2} = E_{\theta_1}$ (4)

$r = a$: $\epsilon_0 (E_{r_2} - E_{r_1}) = \sigma = \sigma_0 \cdot \cos\theta$ (5)

$r \to \infty$: $\vec{E}_2 \to 0$ (6)

Παρατηρώντας τη συνθήκη (5), κάνουμε την αρχική υπόθεση ότι η συνιστώσα E_r είναι ανάλογη προς το $\cos\theta$:

$$E_{r_1} = f_1(r) \cdot \cos\theta \quad (7)$$

$$E_{r_2} = f_2(r) \cdot \cos\theta \quad (8)$$

οπότε η εξίσωση (5) απλοποιείται στη μορφή

$$f_2(a) - f_1(a) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

Από τις διαφορικές σχέσεις (1) και (2) συνάγουμε ότι, εάν η E_r είναι ανάλογη προς το $\cos\theta$, η E_θ θα πρέπει να είναι ανάλογη προς το $\sin\theta$:

$$E_{\theta_1} = g_1(r) \cdot \sin\theta \quad (10)$$

$$E_{\theta_2} = g_2(r) \cdot \sin\theta \quad (11)$$

οπότε η συνθήκη (4) γίνεται:

$$g_2(a) = g_1(a) \quad (12)$$

Εισάγουμε τις σχέσεις (7), (8), (10) και (11) στις (1) και (2):

$$\frac{d}{dr}(rg) + f = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 f) + 2rg = 0 \quad (14)$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο ως προς r της σχέσης (14), εισάγουμε την εξίσωση (13) και καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2 f) - 2f = 0 \quad (15)$$

Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $f \sim r^a$ και έχουμε:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2 f) - 2f = \left[(a+2)(a+1) - 2\right] \cdot r^a = a \cdot (a+3) \cdot r^a = 0$$

οπότε οι τιμές του α βρίσκονται αμέσως:

$$a = 0 \quad , \quad a = -3$$

Η γενική λύση της (15) θα είναι:

$$f = C + \frac{k}{r^3} \quad (16)$$

Η έκφραση για τη συνάρτηση g υπολογίζεται από τη σχέση (14):

$$g = -\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(r^2 f) = -C + \frac{k}{2r^3} \quad (17)$$

Επομένως οι συνιστώσες της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης στο εσωτερικό $(r<a)$ είναι:

$$E_{r_1} = \left(C_1 + \frac{k_1}{r^3}\right) \cdot \cos\theta \quad (18a)$$

$$E_{\theta_1} = \left(-C_1 + \frac{k_1}{2r^3}\right) \sin\theta \quad (18b)$$

κ' στο εξωτερικό $(r>a)$ θα είναι:

$$E_{r_2} = \left(C_2 + \frac{k_2}{r^3}\right) \cos\theta \quad (19a)$$

$$E_{\theta_2} = \left(-C_2 + \frac{k_2}{2r^3}\right) \sin\theta \quad (19b)$$

Από την οριακή συνθήκη (3) προκύπτει ότι:

$$k_1 = 0 \quad (20)$$

ενώ από την οριακή συνθήκη (6) έχουμε ότι:

$$C_2 = 0 \quad (21)$$

Οι σταθερές C_1 και k_2 βρίσκονται από τις συνοριακές συνθήκες (5) και (4) ή, τελείως ισοδύναμα, από τις σχέσεις (9) και (12):

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_2}{a^3} - C_1 &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \\ \frac{k_2}{2a^3} &= -C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \quad (22) \\ k_2 &= \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0} a^3 \quad (23) \end{aligned}$$

και από τις σχέσεις (18) και (19) βρίσκουμε την τελική έκφραση της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\left(\cos\theta\cdot\hat{r} - \sin\theta\cdot\hat{\theta}\right) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\cdot\hat{z} \qquad (24)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(2\cos\theta\cdot\hat{r} + \sin\theta\cdot\hat{\theta}\right) \qquad (25)$$

Το παρόν παράδειγμα που δε μπορούσε να λυθεί απευθείας με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις, λύθηκε με τις σημειακές σχέσεις. Η λύση δεν ήταν, δυστυχώς, εύκολη και για αυτό χρειάζεται συστηματοποίηση των μαθηματικών μεθόδων για προβλήματα με οριακές συνθήκες. Η ανάγκη αυτή γίνεται ακόμα περισσότερο αισθητή, αν επιχειρήσουμε να αλλάξουμε την επιφανειακή πυκνότητα από $\sigma_0\cdot\cos\theta$ σε $\sigma_0\cdot\sin\theta$. Ξεκινάμε τη λύση με τον παραπάνω τρόπο και γρήγορα ανακαλύπτουμε ότι η μέθοδος αυτή δε μπορεί να εφαρμοστεί για τη νέα πυκνότητα.

Η συστηματική λύση των προβλημάτων με οριακές συνθήκες αποτελεί αντικείμενο ξεχωριστού μαθήματος.

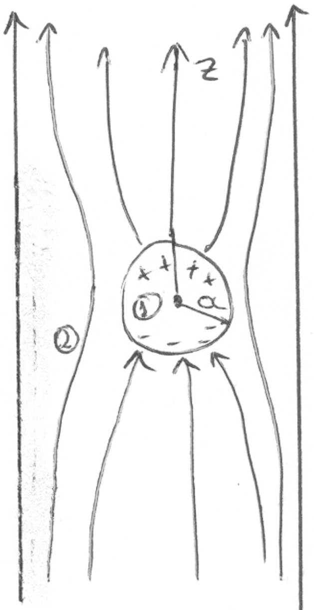
Παράδειγμα 5 (Σφαιρικός αγωγός σε ομοιόμορφο ηλεκτροστατικό πεδίο)

Αγώγιμη σφαίρα ακτίνας α τοποθετείται σε περιοχή όπου υπήρχε ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0$. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη μόνιμη κατάσταση που επιτυγχάνεται μετά την εισαγωγή της σφαίρας.

Λύση:

Αφού η σφαίρα είναι αγώγιμη, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της θα είναι μηδενικό στη μόνιμη κατάσταση. Άρα σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες για αγωγούς, οι εξωτερικές ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές θα πρέπει να καταλήγουν κάθετα στη σφαιρική επιφάνεια, όπου θα επάγεται ηλεκτρικό φορτίο. Η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου αυτού είναι άγνωστη.

Το πρόβλημα δεν έχει σφαιρική συμμετρία και για αυτό δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν απευθείας οι ολοκληρωτικές εξισώσεις του πεδίου. Το πρόβλημα πρέπει να λυθεί με τις σημειακές σχέσεις.



Η συνολική $\vec{E}$ μετά την εισαγωγή της σφαίρας θα είναι ίση με την αρχική $\vec{E}_0$, που έχει τις πηγές της στο άπειρο και, έτσι, δε θα επηρεαστεί από τη σφαίρα, και από την πεδιακή ένταση $\vec{E}_\sigma$ του άγνωστου επαγόμενου φορτίου.

Στο εσωτερικό της σφαίρας ($r<α$) θα έχουμε:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\sigma_1} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\sigma_1} = -\vec{E}_0 = -E_0 \cdot \hat{z}$$

Συγκρίνοντας το συμπέρασμα αυτό με τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, παρατηρούμε ότι η $\vec{E}_{\sigma 1}$ οφείλεται σε κατανομή φορτίου στην επιφάνεια της σφαίρας με επιφανειακή πυκνότητα:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \cos\theta = (3\varepsilon_0 E_0) \cdot \cos\theta$$

Επομένως η $\vec{E}_\sigma$ θα είναι:

$$\vec{E}_{\sigma 1} = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} = -E_0 \cdot \hat{z} = -\vec{E}_0 \quad (r<a)$$

$$\vec{E}_{\sigma_2} = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(2\cos\theta \cdot \hat{r} + \sin\theta \cdot \hat{\theta}\right) = E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(2\cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta \cdot \hat{\theta}\right)$$

$$(r>a)$$

και η συνολική πεδιακή ένταση $\vec{E}$ θα είναι:

$$\vec{E}_1 = 0 \qquad (r<a)$$

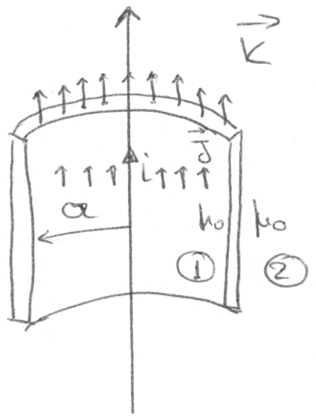
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\sigma_2} = E_0 \left[\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right) \cdot \cos\theta\, \hat{r} - \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cdot \sin\theta \cdot \hat{\theta}\right] \quad (r>a)$$

Παρατηρείστε ότι στην επιφάνεια της σφαίρας η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου φθάνει τιμή τριπλάσια από την αρχική στα σημεία $\theta = 0$ κ' $\theta = \pi$: $\vec{E}_2(r=a^+) = 3E_0 \cdot \cos\theta \cdot \hat{r}$.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί με τις σημειακές σχέσεις η μαγνητική πεδιακή ένταση στον αέρα, η οποία προκαλείται από την εξής κατανομή ρευμάτων σε ένα κυκλικό κύλινδρο απέραντης έκτασης και ακτίνας α: κατά μήκος του άξονα και προς τη διεύθυνση +z ρέει ρεύμα έντασης i, στο εσωτερικό του κυλίνδρου η σταθερή πυκνότητα του ρεύματος είναι $\vec{J} = J \cdot \hat{z}$ και στην κυλινδρική επιφάνεια υπάρχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K} = K \cdot \hat{z}$.

Λύση:



Θα χρησιμοποιήσουμε ένα κυλινδρικό ΣΣ.
Οι πηγές χαρακτηρίζονται από κυλινδρική συμμετρία (δηλ. είναι ανεξάρτητες της συντεταγμένης z). Συμπεραίνουμε ότι και η μαγνητική πεδιακή ένταση θα είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης r από τον άξονα.
Η κυλινδρική επιφάνεια με το επιφανειακό ρεύμα είναι επιφάνεια ασυνέχειας και χωρίζει το πεδίο στις περιοχές 1 και 2, που σημειώνονται στο σχήμα.
Οι σημειακές σχέσεις που χρειάζονται για τη λύση είναι οι ακόλουθες:

$$r \to 0 : \quad \vec{H}_1 \to \frac{i}{2\pi r}\hat{\varphi} \Rightarrow \begin{cases} H_{r_1} \to 0 & (1) \\ H_{\varphi_1} \to \dfrac{i}{2\pi r} & (2) \\ H_{r_1} \to 0 & (3) \end{cases}$$

Στο μόνιμο μαγνητικό πεδίο της περιοχής 1 ισχύει:

$(0<r<a)$

$$\nabla\times\vec{H}_1=\vec{J}\Rightarrow\begin{cases}0=0\\ -\dfrac{dH_{z_1}}{dr}=0 & (4)\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(rH_{\varphi_1}\right)=J & (5)\end{cases}$$

$$\nabla\cdot\left(\mu_0\cdot\vec{H}_1\right)=0\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rH_{r_1}\right)=0 \quad (6)$$

Συνοριακές συνθήκες στην κυλινδρική επιφάνεια $r=a$:

$$\hat{r}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{K}\Rightarrow\begin{cases}H_{\varphi_2}-H_{\varphi_1}=K & (7)\\ H_{z_2}=H_{z_1} & (8)\end{cases}$$

$$\hat{r}\cdot\left(\mu_0\vec{H}_2-\mu_0\vec{H}_1\right)=0\Rightarrow H_{r_2}=H_{r_1} \quad (9)$$

Διαφορικές εξισώσεις για την περιοχή ② $(r>a)$:

$$\nabla\times\vec{H}_2=0\Rightarrow\begin{cases}0=0\\ -\dfrac{dH_{z_2}}{dr}=0 & (10)\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(rH_{\varphi_2}\right)=0 & (11)\end{cases}$$

$$\nabla\cdot\left(\mu_0\cdot\vec{H}_2\right)=0\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rH_{r_2}\right)=0 \quad (12)$$

Οριακή συνθήκη στο άπειρο $(r\to\infty)$:

$$\vec{H}_2\to 0\Rightarrow\begin{cases}H_{r_2}\to 0 & (13)\\ H_{\varphi_2}\to 0 & (14)\\ H_{z_2}\to 0 & (15)\end{cases}$$

$\longrightarrow$

$(4), (10) \Rightarrow H_{z_1} = C_1$ κ' $H_{z_2} = C_2$

$(3), (8), (15) \Rightarrow H_{z_1} = H_{z_2} = 0$

$(6) \Rightarrow H_{r_1} = \dfrac{C_3}{r}$

$(12) \Rightarrow H_{r_2} = \dfrac{C_4}{r}$

που ικανοποιεί κ' την (13).

$(1), (9) \Rightarrow H_{r_1} = H_{r_2} = 0$

Συνεπώς, η μαγνητοστατική πεδιακή ένταση σε προβλήματα με πηγές που παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία $(\partial/\partial\varphi = 0)$ και ομοιομορφία κατά μήκος του άξονα z $(\partial/\partial z = 0)$ θα έχει μόνο φ συνιστώσα και θα είναι συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης r.

$(5) \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r H_{\varphi_1}) = J \right) \Rightarrow r H_{\varphi_1} = \dfrac{J r^2}{2} + C_5 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_{\varphi_1} = \dfrac{J \cdot r}{2} + \dfrac{C_5}{r}$

Η σταθερά C_5 προσδιορίζεται από την οριακή συνθήκη (2) και είναι $\frac{i}{2\pi}$. Δηλ.:

$$H_{\varphi_1} = \frac{J \cdot r}{2} + \frac{i}{2\pi} \qquad (18)$$

$(11) \Rightarrow H_{\varphi_2} = \dfrac{C_6}{r}$

που ικανοποιεί και την οριακή συνθήκη (14).

Η σταθερά C_6 βρίσκεται από τη συνοριακή συνθήκη (7):

$$\frac{C_6}{a} - \left(\frac{J \cdot a}{2} + \frac{i}{2\pi a}\right) = K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_6 = \frac{J \cdot a^2}{2} + \frac{i}{2\pi} + Ka$$

και τελικά:

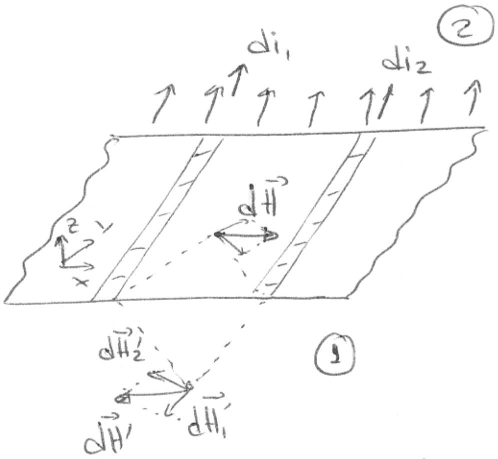
$$H_{\varphi_2} = \frac{Ja^2}{2r} + \frac{i}{2\pi r} + K\frac{a}{r}$$

Οι ίδιες λύσεις θα είχαν υπολογιστεί γρηγορότερα από την ολοκληρωτική μορφή των βασικών νόμων.

Παράδειγμα 7.

Να υπολογισεί με χρήση των συμμετρικών σχέσεων το μαγνητικό πεδίο στον αέρα που οφείλεται στη ροή ρεύματος με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K} = K \cdot \hat{y}$ στο απέραντης έκτασης επίπεδο $z=0$.

Λύση



Όπως δείξαμε σε προηγούμενο παράδειγμα με φυσική υπέρθεση χωρίς μαθηματικά, η μαγν. πεδιακή ένταση θα έχει μόνο x συνιστώσα, που θα είναι συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης z:

$$\vec{H} = H_x(z) \cdot \hat{x}$$

και μάλιστα η εξάρτηση αυτή από το z είναι αντισυμμετρική:

$$H_x(-z) = -H_x(z).$$

Η επιφάνεια $z=0$ με το επιφανειακό ρεύμα είναι επιφάνεια ασυνέχειας και χωρίζει το πεδίο σε δύο περιοχές: την περιοχή ① για $z<0$ κ' την περιοχή ② για $z>0$.

Οι διαφορικές εξισώσεις $\nabla \times \vec{H} = 0$ κ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ στις περιοχές ① και ② δίνουν ότι

$$\frac{dH_{x_1}}{dz} = 0 \qquad \frac{dH_{x_2}}{dz} = 0$$

Δηλαδή

$$H_{x_1} = C_1 \quad κ' \quad H_{x_2} = C_2$$

Από τον αντισυμμετρικό χαρακτήρα της συνάρτησης H_x συνάγουμε ότι:

$$C_1 = -C_2.$$

Οι συνοριακές συνθήκες $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$ κ' $\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ καταλήγουν στη σχέση:

$$H_{x_2} - H_{x_1} = K_y$$

δηλαδή $\qquad C_2 - C_1 = K$

κ' επομένως $\qquad C_2 = -C_1 = \frac{K}{2}$

και η μαγνητική πεδιακή ένταση θα είναι

$$\vec{H}_1 = -\frac{K}{2} \cdot \hat{x}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{K}{2} \cdot \hat{x}$$

σε συμφωνία με τα αποτελέσματα προηγούμενου παραδείγματος.